FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 3

Dérivées - Fonctions de C^1/C^2

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1
1) Déterminer les domaines de définition respectifs des fonctions suivantes, puis déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes

$$\begin{array}{llll}
1.\, f(x,y) = \frac{xy}{x+y} & & 2.\, g(x,y) = \frac{x^3y+y^2x^2}{x+y} \\
3.\, h(x,y) = \frac{xye^x}{x^2+y^2-4} & & 4.\, k(x,y) = \frac{ln(x)}{\sqrt{x^2+y^2-25}} \\
5.\, l(x,y) = \frac{2x}{y} + \frac{y}{2x} & & 6.\, u(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy-4} \\
7.\, l(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & & 8.\, u(x,y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \\
9.\, l(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2} & & 10.\, u(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)
\end{array}$$

Exercice n°2 Pour les fonctions de deux variables suivantes, calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$

$$f(x,y) = \tan(xy) + y, \quad f(x,y) = \frac{x+y}{3+x^2y^2}, \quad f(x,y) = \exp(2x-y)\ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

Exercice n°3 Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $f = f(x,y)$.

$$f = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f = \begin{cases} y^2 \sin\frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f = \begin{cases} (x^2+y^2)^{\,x} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice n°4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la différentiabilité de f en $(0,0)$.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°5 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \quad pour \quad (x,y) \neq 0 \quad et \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f est de classe C^1. f admet-elle des dérivées partielles d'ordre 2 à l'origine ?

Exercice n°6 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Hammou El-Otmany

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. En déduire que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^{\in}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°7 Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Donner l'expression de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Calculer les dérivées partielles secondes croisées en 0 et montrer que :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$
3. f est-elle C^2.

Exercice n°8 Soit $f\ :\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe de C^1 et $g\ :\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Exercice n°9 Comment faut-il choisir le nombre réel α pour que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\ \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

soit continue au point $(0,0)$? Soit différentiable au point $(0,0)$?

Exercice n°10 Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$ l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $f = f(x,y)$.

$$f = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \sin\ \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f = \begin{cases} y^2 \sin\ \dfrac{x}{y} & \text{si } \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si } \quad y = 0 \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f = \begin{cases} (x^2+y^2)^{\ x} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice n°11 Étudier la différentiabilité des applications suivantes et calculer leur différentielle ainsi que leur dérivées partielles. $Z = x^3 + y^2 + 5xy$ et $(\ U,\ V,\ W) = \left(e^x \sin y,\ \sqrt{e^{x+y} - x^2},\ \dfrac{x}{x^2+y^2}\right).$

Exercice n°12 Montrer que sur un ouvert que l'on précisera :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = 1 \ \text{ si } U = x + \frac{x-y}{y-z}$$

Hammou El-Otmany