L1-MASS - Fonctions de 2 variables - 2013-2014

Feuille de travaux dirigés N° 4

Équation du plan tangent - Développements limités

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1 On considère les fonctions de deux variables suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$; $(x_0, y_0) = (1,1)$.
2. $f(x,y) = 3(x^2 + y^2)$; $(x_0, y_0) = (0,0)$.
3. $f(x,y) = 3sin(xy)$; $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)$.
4. $f(x,y) = 2(x-1)^2 - 3(y-\sqrt{2})^2$; $(x_0, y_0) = (1, \sqrt{2})$.

Dans chacun des cas ci-dessus, déterminer une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point (x_0, y_0).

Exercice n°2 (*Développements limités pour une fonction à une seule variable*)

Établir pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n.

(a) $f(x) = e^x,\ n = 6$ (b) $f(x) = \sqrt{1+x},\ n = 4$

(c) $f(x) = \ln(1+x^2),\ n = 5$ (d) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x},\ n = 4$

(e) $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2),\ n = 4$ (f) $f(x) = \tan(x),\ n = 3$

(g) $f(x) = e^{3x}\sin(2x),\ n = 4$ (h) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}},\ n = 3$

Exercice n°3 (*rappel sur le dérivées*) Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes et les calculer.

(a) $f(x,y) = x^2 e^{xy}$ (b) $f(x,y) = \sin x^2 + \cos y^2$ (c) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

Exercice n°4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \frac{e^x}{1+y^2}$

1. Expliquer brièvement pourquoi f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage du point de coordonnées $(0,0)$.

Exercice n°5 On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 4xy + 3y - 4.$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
2. Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(1,1)$.

Exercice n°6 On considère les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{x+y}{3+x^2y^2}, \quad f(x,y) = \exp(2x-y)\ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
2. Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $(0,1)$.