## FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 5

Extremums - Équations aux dérivées partielles

**Enseignant** : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

---

**Exercice n°1** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$. La fonction $f$ est dite convexe sur $I$ si pour tout $x,\ y \in I$, et tout $\theta \in ]0,1[$ : $f(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$.

1. Interpréter géométriquement cette propriété.
2. Soit $f$ une fonction convexe sur $I$.Soient $x,\ y,\ z \in I$ avec $x < y < z$.Montrer que l'on a :
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$
3. Déduire de la question précédente que pour tout $x_0 \in I$, la fonction h définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par :
$$h(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
est croissante.
4. On suppose que $f$ est dérivable sur $I$. Montrer que $f$ est convexe sur $I$ ssi $f'$ est croissante sur $I$.
5. On suppose que $f$ est dérivable et convexe sur $I$, montrer que $C_f$ est au dessus de sa tangente en tout point de $C_f$ .
6. Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$.
7. Montrer que $f$ est convexe ssi $f'' \geqslant 0$ sur $I$.
8. Montrer que si $f$ est dérivable et convexe alors tout point critique de f est un minimum global.

**Exercice n°2** On considère la fonction $f$ définie par :
$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 4xy + 3y - 4.$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
2. Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de $f$ au voisinage du point $(1,1)$.
3. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y)?1 \geqslant 0$. Démontrer qu'il existe un point qui minimise $f(x,y)$.
4. On désigne par $\nabla f$ le vecteur de coordonnées respectives $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Résoudre l'équation $\nabla f = 0$.

**Exercice n°3** On considère une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Étudier les variations de $f$ et tracer la courbe $C_f$ de $f$.
3. Trouver les extremums de $f$.

**Exercice n°4** Étudier la fonction définie par $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ (domaine de définition, tableau de variations, courbe de $C_f$, les extremums de $f$).

**Exercice n°5**

1. Montrer que l'équation $e^x + x = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution a et une seule.
2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + e^{x+y}.$$

   Étudier les extremums locaux et globaux de $f$.

**Exercice n°6** Soit f la fonction définie sur par

$$f(x,y) = 2\sqrt{1+x^2+y^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}y$$

1. Étudier les extremums locaux et globaux de $f$.
2. Tracer la courbe $C_f$ de $f$ et situer les extréma globaux sur la courbe.

**Exercice n°7** Soit $f$ la fonction définie par sur $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x(\ln x)^2 + xy^2$

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Étudier les extremums locaux et globaux de $f$.

**Exercice n°8** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. Déterminer le point critique $(x_0, y_0)$ de $f$ et montrer que $f$ atteint un minimum en ce point.

**Exercice n°9**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. Déterminer les point critiques de $f$ et indiquer si ces points correspondent à un minimum ou un maximum de $f$.

**Exercice n°10** Calculer les dérivées partielles premières et étudier les extremums de$f$.

1. $f(x,y) = x(\ln x)^2 + xy^2$
2. $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

**Exercice n°11** On rappelle la loi de Boyle Mariotte, valable pour une môle de gaz parfait : $PV = RT$ , où $P$ désigne la pression du gaz, $V$ son volume, $R$ la constante des gaz parfaits et $T$ la température du milieu.

1. Calculer $\frac{\partial P}{\partial T}$ et $\frac{\partial P}{\partial V}$.
2. Même question si l'on considère à présent la relation de Van der Waals, avec les mêmes conventions que précédemment, et avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ : $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$.

**Exercice n°12** Soit $\varphi$ une fonction dérivable de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $Z = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie l'équation $(x^2 - y^2)\dfrac{\partial Z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial Z}{\partial y} = xyZ$.

**Exercice n°13** En effectuant le changement de variables $u = x + y$ et $v = 2x + 3y$, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

**Exercice n°14** En effectuant le changement de variables $u = x$ et $v = y - x$, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

**Exercice n°15** En utilisant les coordonnées polaires, résoudre sur $\mathbb{R}^2$ $(0, 0)$ l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

**Exercice n°16** En utilisant les coordonnées polaires, déterminer les $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Exercice n°17** Déterminer les fonctions $f$ de classe $C^1$ solutions des systèmes suivants :

$$(a)\ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = xy^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = x^2 y, \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = \frac{x}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{array}$$

**Exercice n°18** Calculer $\dfrac{\partial Z}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial Z}{\partial v}$ lorsque $Z = f(x, y)$ avec $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$ et $f$ est de classe $\mathbb{C}^1$.

**Exercice n°19** Soit $E$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré $\alpha$ qui soit de classe $\mathbb{C}^2$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E$ on note par $f = f(x, y)$ :

$$\alpha(\alpha - 1) f = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

2. En prenant $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ et en effectuant le changement de variable $x = u$ et $y = uv$. Trouver toutes les fonctions $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

**Exercice n°20** Trouver une fonction $Z = Z(x, y)$ sachant que $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

**Exercice n°21** Trouver les fonctions $Z = Z(x, y)$ sachant que

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x} \text{ et } Z(1, y) = \sin y.$$

Préciser les domaines d'intégration.

**Exercice n°22** (*Un peu difficile*) Montrer que la fonction $Z = \varphi\left(x^2 + y^2\right)$ vérifie l'équation

$$y\frac{\partial Z}{\partial x} - x\frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

**Exercice n°23** (*fonctions à trois variables*) En effectuant le changement de variable $u = x - y$ et $v = x + y$, puis $u = x$, $v = y - x$ et $w = z - x$ trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ qui sont solutions des équations aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$.