L1-MASS - FONCTIONS DE 2 VARIABLES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 6

Analyse vectorielle - Fonctions harmoniques

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2013-2014

Exercice n°1 (*Laplacien en coordonnées polaires*). On appelle laplacien d'un champ scalaire F de classe C^2 le champ scalaire défini par :

$$\Delta F = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{grad}\right)$$

(a) Montrer que $\Delta F = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
(b) Exprimer $\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(M)$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial x}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(M)$
(c) Exprimer ΔF en fonction de $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$

Exercice n°2 (*Laplacien en coordonnées sphériques*). Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r, \varphi, \theta) = f(r \sin\varphi \cos\theta,\ r \sin\varphi \sin\theta,\ r\cos\varphi).$$

Montrer que pour tout $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^* \times \{t \in \mathbb{R}\ t \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\triangle f &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cot}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Faire la même chose pour les coordonnées cylindriques

Exercice n°3 Soit F un champ scalaire de classe C^1 de l'espace. Exprimer $\overrightarrow{grad}F(M)$ en fonction $\frac{\partial F}{\partial \rho}(M)$, $\frac{\partial F}{\partial \phi}(M)$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(M)$ et des vecteurs du repère cylindrique associé au point M.

Exercice n°4
Soit F le champ de vecteurs du plan défini par $\overrightarrow{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.

1. Calculer $\operatorname{div}\overrightarrow{F}(M)$.
2. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ dérive-t-il d'un potentiel ?

Exercice n°5
Soit F le champ de vecteurs de l'espace défini par $\overrightarrow{F}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.

1. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ dérive-t-il d'un potentiel ?
2. Calculer $\operatorname{div}\overrightarrow{F}(M)$ et $\operatorname{Rot}\overrightarrow{F}(M)$.

Exercice n°6 Calculer $\dfrac{\partial Z}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial Z}{\partial v}$ lorsque $Z = f(x, y)$ avec $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$ et f est de classe $\mathbb{C}^1$.

Exercice n°7 (*Un peu difficile*) Soit $f,\ g\ :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice n°8 Une application $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathbb{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$. Où $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial\, x_i^2}$ est le Laplacien de f.

a) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soient $z = x + iy$, $f(x, y) = \ln \left| e^{ze^{-z}} \right|$.
Montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que si f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^3$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.

c) Vérifier que $f(x, y, z) \longrightarrow \arctan \dfrac{y}{x} + \arctan \dfrac{z}{y} + \arctan \dfrac{x}{z}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^{*3}$.

Exercice n°9 (*peu difficile*) Montrer que sur un ouvert que l'on précisera :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = 1 \text{ si } U = x + \frac{x - y}{y - z}$$