UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

L1-MATH- SUITES ET FONCTIONS

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

Suites numériques

e2s UPPA energy environment soluti

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2014-2015

Exercice n°1 Soit (u_n) ma suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Calculer u_0 et u_{10}.
2. Exprimer u_{n+1}, en fonction de n et u_n.

Exercice n°2 Soit (u_n) ma suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$.

1. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice n°3 Montrer par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, $2^n \geqslant 6n + 7$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 - \dfrac{1}{2^n - 1}$ où la suite u_n est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3 (a divisible par 3 s'écrit $a = 3q$).
4. $a \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

Exercice n°4 Démontrer

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice n°5 Calculer la limite des suites données par les termes généraux suivants :

$$\frac{n^3}{-3 + \sin n}, \quad \cos\left(\frac{1}{n}\right), \quad e^{-(n+1)^2}\cos(n^3 + 1)$$
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \frac{3^n - 2^n}{2^n + 3^n}, \quad \frac{1}{n}\ln(1 + 2n)$$

Exercice n°6 Pour quels réels a non nuls la suite $u_n = \frac{2^n+3^n}{a^n}$ a-t-elle une limite finie ?

Exercice n°7 Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par $u_0 = -1,\ u_1 = -1$ et

$$u_{n+2} = (n + 1)u_{n+1} - (n + 2)u_n.$$

1. calculer les quinze premiers termes de la suite.
2. Que peut-on conjecturer pour $u_{n+1} - u_n$?
3. En déduire une conjecture sur la suite (u_n).
4. Démontrer cette dernière conjecture.

Exercice n°8 Déterminer la limite, si celle ci existe, des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n},\ n \geqslant 0 \quad ; \quad b_n = \sqrt{n^2+2n+1} - \sqrt{n^2-2n-1},\ n \geqslant 0$$
$$c_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}},\ n \geqslant 1 \quad ; d_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k,\ n \geqslant 0$$
$$p_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \geqslant 1 \quad ; \quad q_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}},\ n \geqslant 1$$
$$r_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n},\ n \geqslant 2 \quad ; \quad s_n = \frac{e^n}{n^n},\ n \geqslant 1$$

Exercice n°9 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_n = \dfrac{n}{n+1}u_n + \dfrac{4}{n+1}$.

1. Calculer u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison de (v_n).
3. En déduire l'expression de (v_n) en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite (u_n) est strictement monotone et bornée.

Exercice n°10 Étudier la nature des suites suivantes :

1. $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3u_n - 2\overline{u}_n)$
2. $u_n = \left(2\sin(\dfrac{1}{n}) + \dfrac{3}{4}\cos(n)\right)^n$

Exercice n°11 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite définie par

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

On pose $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer, pour tout $x \geqslant 0$ l'inégalité $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$.
2. En déduire que
$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant v_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$
On admettra que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Montrer que (v_n) converge, et préciser sa limite.
4. Montrer que (u_n) converge, et préciser sa limite.

Exercice n°12 Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}$.

1. Écrire une formule de récurrence liant u_{n-1} et u_n.
2. Montrer que la suite $(\frac{u_n}{\sqrt{n}})$ est bornée.
3. Déterminer sa limite.

Exercice n°13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer, pour tout n, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$, $n \geqslant 0$, est croissante.
4. Montrer que la suite (v_n) admet une limite l appartenant à $]0,1[$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
5. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n$. Montrer que (w_n) converge vers $l(1-l)$.
6. Soit (t_n) une autre suite telle, pour $n \geqslant n_0$, on a
$$t_{n+1} - t_n \geqslant \frac{a}{n},$$
où $a > 0$. Montrer que $t_{2n} - t_n \geqslant \dfrac{a}{2}$ pour $n \geqslant n_0$, puis que (t_n) est divergente.
7. Montrer que si $l \neq 1$, la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente. En déduire la valeur de l.

Exercice n°14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $S_n(p) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^p}{k^{p+1}+1}$ pour tout entier $p \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_{2n}(p) - S_n(p) \geqslant \dfrac{1}{4}$, $\forall p \geqslant 1$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n(p) = +\infty$, $\forall p \geqslant 1$.

Exercice n°15 On considère la suite (u_n) de nombre réels définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} 0 < u_0 \leqslant 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \left(\dfrac{u_n}{2}\right)^2, \forall n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice n°16 Soit $\alpha > 0$ et soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 > 0$ et

$$u_n \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\alpha}{u_n}\right), \; n \geqslant 0.$$

1. Montrer que

$$u_{n+1}^2 - \alpha = \frac{(u_n^2 - \alpha)^2}{4u_n^2}.$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant \sqrt{\alpha}$ et que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. En appliquant l'identité remarquable à $u_{n+1}^2 - \alpha$, donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{\alpha}$ en fonction de $u_n - \sqrt{\alpha}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{\alpha} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$, montrer que

$$u_n - \sqrt{\alpha} \leqslant 2\sqrt{\alpha} \left(\frac{k}{2\sqrt{\alpha}} \right)^{2^{n-1}}.$$

6. Application : calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice n°17 Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer, pour tout $n > 0$, l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que $\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de S_n.
4. Montrer que la suite de terme général $u_n := S_n - \ln(n)$ converge (*indication : on montrera que* $(u_n)_{n>0}$ *est décroissante*.

Exercice n°18 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. En déduire que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, est convergente.

Exercice n°19 Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < 1$.

1. Étudier la nature de la suite (v_n) telle que $v_n = \prod\limits_{i=0}^{n} u_i$, $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < q < 1$. Déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Soit (a_n) une suite à termes positifs et borné. On définit la suite (w_n) par :

$$\begin{cases} w_0 = & a_0, \\ w_n = & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u_k^k, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Étudier la suite (w_n).

Exercice n°20 Soit (u_n) la suite de nombres réels définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E(\sqrt{n}).$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°21 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, notée e.
2. Montrer que e est irrationnel.

Exercice n°22

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + a^n, \end{cases}$$

   où a est un réel donné.
2. Généraliser le résultat au cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + v_n, \end{cases}$$

   avec v_n est une suite donnée.