FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 2

Fonctions : limites et continuités

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2014-2015

Exercice n°1 Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ pour tout $x \neq 0$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 . (On pourra utiliser les suites $u_n = \dfrac{1}{\pi n}$ et $v_n = \dfrac{2}{4n\pi + \pi}$.)

Exercice n°2 Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer si f admet une limite en a et la cas échéant calculer cette limite :

$(i)\ f(x) = \dfrac{3x^2-1}{4x+7}, a = \pm\infty$ $\quad (ii)\ f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}, a = 1$ $\quad (iii)\ f(x) = x^2 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{2x}, a = 0$

$(iv)\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}, a = \pm\infty$ $\quad (v)\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}, a = 0$ $\quad (vi)\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}, a = 0$

$(vii)\ f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}, a = +\infty$ $\quad (viii)\ f(x) = \sqrt{x^2+5x}+3-\sqrt{x^1-1}, a = -\infty$

Exercice n°3 Pour chacune des fonctions f suivantes calculer la limite de f en 0 :

$$(i)\ f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}, \quad (ii)\ f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(3x)}, \quad (iii)\ f(x) = \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin(x)}, \quad (iv)\ f(x) = \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)}.$$

Exercice n°4 Démontrer les résultats suivantes.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3} = 1; \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = 0; \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)(e^x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{x} = \frac{2}{3}; \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = 0; \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)(e^x+2)} = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = 1; \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{\tan(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{\tan(x)(1-\cos(x))}{\sin^3(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow0} (1+x)^{1/x} = e; \quad \lim_{x\longrightarrow0} (1-x^2)^{1/x} = 1; \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)} = -\frac{2}{3}; \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)} = -2$$

$$\lim_{x\longrightarrow0} \frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|} = 1; \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}} = -1; \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)} = -\frac{2}{3}; \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)} = -2$$

Exercice n°5 Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^2e^{-\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^4\ln^2(x)e^{-\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2+1}; \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2(x)}$$

$$\lim_{x\longrightarrow1^-} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}, \quad \lim_{x\longrightarrow1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\longrightarrow1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}; \quad \lim_{x\longrightarrow1} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\pi/2} \frac{\cos(x)}{2x-\pi}, \quad \lim_{x\longrightarrow\pi/2} (1-\sin(x))\tan(x), \quad \lim_{x\longrightarrow\pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}; \quad \lim_{x\longrightarrow\pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\pi/4}$$

Exercice n°6 Justifier les équivalents suivants, au voisinage de 0.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-x}\sim 2x \quad ; \quad \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-x}\sim \frac{1}{x} \quad ; \quad x^2-2x^3\sin(1/x)\sim x^2 \quad ; \quad \frac{e^{2x}-1}{\sqrt{e^x-1}}\sim 2\sqrt{x}$$

Exercice n°7 Justifier les équivalents suivants, au voisinage de $+\infty$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-x}\sim x \quad ; \quad \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-x^4}\sim -\frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{x^2+\cos(x)}{x+\sin(x)}\sim x \quad ; \quad \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\sim e^x$$

Exercice n°8 Pour chacune des fonctions f suivantes, démontrer directement qu'elle est continue en tout point de son domaine de définitions sans utiliser les théorèmes de cours

$$f_1(x)=x^2 \quad ; \quad f_2(x)=\frac{1}{x^2} \quad ; \quad f_3(x)=\sqrt{x} \quad ; \quad f_4(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Exercice n°9 Les applications suivantes de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ peuvent-elles être prolongées en des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f_1(x)=\frac{1}{|x|}, \qquad f_2(x)=x|1+\frac{1}{x}|, \qquad f_3(x)=x\cos(1/x).$$

Exercice n°10 Déterminer si les assertions suivantes sont vraies :

1. La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.
2. La somme d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.
3. La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.
4. La somme de deux fonctions discontinues en un point est continue en ce point.
5. Le produit de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.
6. Le produit d'une fonction continue en un point et d'une fonction discontinue en ce point est discontinue en ce point.

Exercice n°11 Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x)=\begin{cases} xE(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points $x\in\mathbb{R}$ où f est continue. Tracer son graphe.

Exercice n°12 La fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus -1,0$ par $f(x)=1-x-\dfrac{2x\ln|x|}{x+1}$ peut-elle être prolongée par continuité en -1 et 0 ?

Exercice n°13 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}^+$. On suppose que $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

Exercice n°14 Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que $|f|$ est une fonction continue. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice n°15 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que l'on ait $f(x_n) = f(x_n + 1/n)$.

Exercice n°16 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est-à-dire que

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max|\alpha|, |\beta|$.

1. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\beta x \leqslant f(x) - f(0) \leqslant \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1-t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1-t)(-1)$,avec $t = \frac{1}{1+x}$]
2. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)|? \leqslant \gamma|x|$. En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice n°17 Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont convexe :

$$a) \quad f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}); \qquad b) \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$