FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 3

Dérivées, théorème de Rolle et Accroissements finis

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2014-2015

Exercice n°1 Déterminer si les assertions suivantes sont vraies.

1. Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.
2. Toute fonction continue en un point est dérivable en ce point.
3. La dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Toute fonction non dérivable en un point est discontinue en ce point.
5. La somme de deux fonctions dérivables en un point est dérivable en ce point.
6. La somme de deux fonctions non dérivables en un point est dérivable en ce point.

Exercice n°2 Les fonctions suivantes sont, définies sur $\mathbb{R}$, sont elle dérivables en 0 ?

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}; \qquad g(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$$

Exercice n°3 Soit f une fonction dérivable en un point a. Montrer que, lorsque $h \longrightarrow 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \longrightarrow f'(a).$$

Exercice n°4 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice n°5 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1; \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice n°6 Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice n°7 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$$
$$k(x) = \ln(\ln(x)) \quad ; \quad u(x) = \ln(x^2 + 3x)\cos(2x) \quad ; \quad v(x) = x^x$$

Exercice n°8 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de $x \longmapsto \sin(f(x)^2)$ et $x \longmapsto \sin(f(x^2))$.
2. On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \longmapsto \ln(|f(x)|)$.

Exercice n°9

1. Calculer la dérivée $x \longmapsto (1 + x^2)\sin x$
2. Montrer que l'équation $(x^2 + 1)\cos x + 2x \sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.

Exercice n°10 Soit $f : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continûment dérivable sur $[0,\, 1]$. On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in [0,\, 1]$, on ait $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,\, 1]$, on ait $f(x) \geqslant mx$.

Exercice n°11 Démontrer les inégalités suivantes :

1. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. $\dfrac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x, \forall x > 0$.
3. $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant sinx \leqslant x, \forall x \in [0,\, \pi/2]$.

Exercice n°12 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,\, b]$, dérivables sur $]a,\, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,\, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Exercice n°13 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{2} \text{ si } x < 1 \text{ et } f(x) = x \text{ si } x \geqslant 1.$$

Montrer qu'il existe un $c \in]0,\, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$, puis déterminer toutes les valeurs possibles de c.

Exercice n°14 Soit $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,\, b]$, dérivable sur $]a,\, b[$ et qui ne prenne que des valeurs strictement positives.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a,\, b[$ tel que l'on ait :

$$f(a) = f(b)e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$