FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 4

Règle de l'Hôpital - Développements limités.

Enseignant : H. El-Otmany

A.U. : 2014-2015

Exercice n°1 Appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{x}{x-1}\right);\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{x}{x\sin(x)}\right);\quad \lim_{x\longrightarrow \pi}\left((x-\pi)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right);$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right);\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin(x)^2}{1-\cos(x)}\right)^{\tan(2x)};\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{2^x-1}{x}\right);\quad \lim_{x\longrightarrow 1}\left(x^{1/(1-x)}\right).$$

Exercice n°2 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I.

1. Donner l'expression du polynôme de Taylor de f à l'ordre n en un point $x_0 \in I$.
2. Rappeler l'énoncé des formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange pour la fonction f au point x_0, en indiquant soigneusement les hypothèses.

Exercice n°3

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant e^x - x - 1 \leqslant \dfrac{x^2}{2}e^x$.

Exercice n°4

1. Soit n un entier strictement positif. Écrire la formule de Taylor avec reste intégrale au voisinage de 0 à l'ordre n pour la fonction cos(x).
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$ a une limite quand n tend vers l'infini, et calculer cette limite.

Exercice n°5 Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions définies comme suit au voisinage de 0 :

1. $f(x) = \cos(x^2) + \sin(x)$ avec $n = 7$.
2. $f(x) = \cos(2x)\sqrt{1+x}$ avec $n = 4$.
3. $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x-x2}$, avec $n = 3$.
4. $f(x) = (sin(x^3))^{1/3}$, avec $n = 10$.
5. $f(x) = \ln(1 + 2x\sin(x))$, avec $n = 4$.
6. $f(x) = e^{\cos(x)}$, avec $n = 3$.
7. $f(x) = (1 + cos(x))^{1/2}$, avec $n = 3$.

Hammou EL-Otmany

8. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, avec $n = 5$.
9. $f(x) = (1 + x)^{1/x}$, avec $n = 3$ (avec $f(0) = e$).
10. $f(x) = \dfrac{(1 + x)^{23}}{(1 + 2x)^{15}(1 - 2x)^{18}}$, avec $n = 2$.
11. $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)\mathrm{sh}(x)}$, avec $n = 4$.

Exercice n°6 Montrer que :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\, dt = \ln(3); \quad \lim_{x \longrightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\, dt = \ln(2).$$

Exercice n°7 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\mathrm{argsh(x)}}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

1. Montrer que f satisfait l'équation différentielle :
$$(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 1.$$
2. En déduire le développement limité de f à l'ordre 7 en 0.

Exercice n°8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. Donner la tangente à la courbe représentative de f au voisinage du point $x = 0$. Donner la position de la courbe par rapport à cette tangente et représenter sommairement le graphe de f au voisinage du point 0.

Exercice n°9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{ex - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout x.
2. Montrer que f est en fait deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner $f''(0)$.
3. Écrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour f. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport ‘a sa tangente en 0.
4. Déterminer les variations de la fonction $\phi(x) = xe^x - e^x + 1$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'intervalle image J de la fonction f, et montrer que la fonction réciproque $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de f est deux fois dérivable sur J.

Exercice n°10 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2(1 + x^2)} - \frac{\cos(x)}{x^2} \right); \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\ln(1 + x^2)} \right); \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{x^2 \sin(x)}{x - \sin(x)} \right); \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \right).$$

Exercice n°11 Préciser le domaine de définition et rechercher les asymptotes aux graphes des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}; \quad g(x) = \left((x^2 - 2)(x + 3) \right)^{1/3}.$$

Hammou El-Otmany