FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 5

Calcul des intégrales

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2014-2015

Exercice n°1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{llllll}
(a) & f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)^3} & (b) & f(x)=3\cos(x)\sin(x) & (c) & f(x)=\arctan(x)\\
(d) & f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}+\dfrac{3}{x^2} & (e) & f(x)=x\sin^3(x) & (f) & f(x)=x\sqrt{1+2x^2}\\
(g) & f(x)=\dfrac{1}{x+x\ln^2(x)} & (h) & f(x)=\mathrm{ch}(x)\cos(x) & (i) & f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}\\
(j) & f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} & (k) & f(x)=\mathrm{Argsh}(3x) & (l) & f(x)=\ln(1+x^2)\\
(m) & f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1}) & (n) & f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} & (p) & f(x)=2\,\mathrm{th}(x)
\end{array}
$$

Exercice n°2

1. Soit x un réel strictement positif. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx/n}$ en fonction de x.
2. Montrer que la limite de $\left(\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx/n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini existe.
3. En déduire que $\int_{[0,\,x]} e^s ds = e^x - 1, \forall x > 0$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Établir les deux égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{2n}\right)\sin\left(\frac{kx}{n}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2n}\right)-\cos\left(\frac{2n+1}{2n}x\right)\right)\\
\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{2n}\right)\cos\left(\frac{kx}{n}\right) &= -\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2n}\right)-\sin\left(\frac{2n+1}{2n}x\right)\right)
\end{aligned}
$$

2. Utiliser ces résultats pour établir les formules :

$$\int_{[0,\,x]} \sin(s)\,ds = 1-\cos(x); \quad \int_{[0,\,x]} \cos(s)\,ds = -\sin(x),\ \forall x > 0.$$

Exercice n°3 Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$

1. Donner signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(x)$.
3. Donner le DL de F au voisinage de $x = 1$ à l'ordre 4.

Exercice n°4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue périodique, de période $T > 0$. En utilisant le changement de variables, montrer que l'intégrale $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx$ ne dépend pas de α.

Exercice n°5 Calculer les intégrales suivantes par les changements de variables : $t = \ln(x)$ pour $I_1,\ I_2,\ I_3$, $t = e^x$ dans I_4, $x = \sin(t)$ dans I_5, $x = 1/t$ dans I_6, $t = \sin(x)$ dans I_7).

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx; \quad I_2 = \int_e^3 \frac{1}{x(\ln(x))^3}\,dx; \quad I_3 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)+1)}\,dx;$$
$$I_4 = \int_0^1 e^x \cos(e^x)\,dx; \quad I_5 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx; \quad I_6 = \int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx;$$
$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\cos(x)\,dx; \quad I_8 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^4\cos(x)^3\,dx; \quad I_9 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^3\cos(x)^2\,dx;$$

Exercice n°6 Calculer les intégrales suivantes par l'intégration par parties :

$$J_1 = \int_0^2 (x-2)e^{-x}\,dx; \quad J_2 = \int_0^1 \arctan(x)\,dx; \quad J_3 = \int_0^1 (x^2+1)\cos(x)\,dx;$$
$$J_4 = \int_1^5 \Big(3x^2+x+2\Big)\ln(x)\,dx; \quad J_5 = \int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx; \quad J_6 = \int_1^3 x\ln(x)\,dx;$$
$$J_7 = \int_0^1 (x+1)^2\cos(x)\,dx; \quad J_8 = \int_0^1 \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx; \quad J_9 = \int_0^2 (x^2+3x-1)e^x\,dx;$$

Exercice n°7 (*Pas de technique spéciale pour les fractions rationnelles ou autres*) Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
I_1 = & \displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5\,dx & I_2 = & \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^3\,dx & I_3 = & \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\,dx \\
I_4 = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx & I_5 = & \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx & I_6 = & \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx \\
I_8 = & \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\,dx & I_9 = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\,dx & I_{10} = & \displaystyle\int_1^e x\ln^2(x)\,dx \\
I_{11} = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\,dx & I_{12} = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx & I_{13} = & \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx \\
I_{14} = & \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx & I_{15} = & \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx & I_{16} = & \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,dx
\end{array}$$

Exercice n°8 (*Des techniques spéciales pour les fractions rationnelles*) Calculer les intégrales et primitives suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
I_1 = & \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}\,dx & I_2 = & \displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2-3x-4}\,dx & I_3 & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\,dx \\
I_4 & \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx & I_5 & \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx & I_6 & \displaystyle\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx
\end{array}$$

Exercice n°9 Nous nous intéressons à montrer par l'absurde que π est un nombre irrationnel. Supposons que $\pi = \dfrac{p}{q}$, et posons $P_n(X) = \dfrac{1}{n!}X^n(p-qX)^n$, et $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\,dt$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X-\pi) = P_n(X)$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, et $P_n^{(n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{N}$ (on pourra procéder à des intégrations par parties successives).
5. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$. En déduire que l'hypothèse initiale est absurde.

Exercice n°10 (*Problème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling*)

— Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$.
3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
4. En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} (on les exprimera à l'aide de factorielles).
5. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) puis prouver sa convergence.
6. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
8. Déterminer un équivalent simple de I_n.

— **u**n résultat technique : Soit f une fonction concave sur un segment $[a;b]$ et $M = \sup_{x \in [a;b]} |f''(x)|$. On note g la fonction affine vérifiant $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.

1. Expliquer (sans calcul !) pourquoi $\int_a^b f(t)\, dt \geqslant \int_a^b g(t)\, dt$.
2. Montrer que, $\forall t \in [a;b]$, $f(t) - g(t) \leqslant M\dfrac{(t-a)(b-t)}{2}$ (on pourra introduire la fonction $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(x-b)$, où K est une constante choisie pour assurer $h(t) = 0$).
3. En déduire que $\int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b g(t)\, dt \leqslant \dfrac{M(b-a)^3}{12}$.
4. Appliquer ce résultat à la fonction $\ln$ pour prouver que $0 \leqslant \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$.

— **F**ormule de Stirling : On introduit les deux suites $u_n = \ln(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}) - \ln(n!)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$.

1. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (on pourra bien sûr exploiter les résultats des deux premières parties de l'exercice).
2. Montrer que leur limite commune est égale à $-\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$ (on pourra s'intéresser à la limite de $2u_n - u_{2n}$).
3. En déduire un équivalent de $n!$.